

# Penentuan Koefisien Daya Angkat Pesawat Terbang Layang Terhadap Gerakan Angin Vertikal

**Yatini\*, E. Apriliani, Soetrisno<sup>†</sup>**

Jurusan Matematika

Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya

erna@matematika.its.ac.id

## Abstrak

Permasalahan penentuan waktu terbang minimum dari sebuah pesawat terbang layang akibat pengaruh gerakan angin vertikal adalah merupakan permasalahan kontrol optimal non linear atau permasalahan optimasi non linier. Sedangkan penentuan waktu tercepat dengan lintasan bebas, adalah merupakan permasalahan penentuan fungsi pengontrol pesawat terbang layang yang dipengaruhi kecepatan angin sehingga dicapai sasaran yang tepat dengan waktu tercepat. Dalam makalah ini dikaji penentuan fungsi pengontrol yang sesuai untuk mendapatkan waktu minimum dengan keadaan awal dan akhir lintasan pesawat adalah tetap. Masalah ini diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta Order Empat. Hasil simulasi dilakukan untuk beberapa kecepatan angin yang berbeda, sehingga diperoleh fungsi pengontrol yaitu sudut angkat untuk masing-masing kecepatan angin dengan waktu terbang minimum.

**Kata kunci:** kontrol optimum, lintasi pesawat terbang layang, Runge Kutta Orde Empat.

---

\*Mahasiswa S2 Matematika ITS-Staf SMKN 1 Nganjuk

<sup>†</sup>Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember

## 1. Pendahuluan

Olahraga terbang layang adalah cabang olahraga dirgantara yang menggunakan pesawat terbang layang atau pesawat glider. Pesawat glider ini seperti pesawat biasa tetapi dalam bentuk kecil, dapat dilengkapi mesin sebagai tenaga dorong, atau tanpa mesin. Untuk dapat terbang di udara, mula-mula pesawat glider ditarik oleh pesawat terbang. Setelah mencapai ketinggian lebih dari 500 meter, pesawat glider melepaskan diri dari pesawat penarik. Terbang layang ini mirip dengan permasalahan "optimal dolphin soaring". Pola gerakan dalam "dolphin soaring" terjadi secara alami. Dalam terbang layang, pesawat turun ke permukaan tanah dengan gerakan angin vertikal sinusoidal dan gerakannya turun-naik-turun sampai dengan waktu yang ditempuh. Beberapa penulis telah mengkaji permasalahan terbang layang dengan tanpa gerakan angin vertikal dengan dua cara berbeda yaitu penerbangan secara sepotong-sepotong dalam keadaan statis dan secara simultan dalam keadaan statis [3]. Penerbangan dengan gerakan angin vertikal sinusoidal dari kehilangan ketinggian minimum sudah dibahas dalam [4]. Dalam makalah ini yang dikaji adalah menentukan fungsi kontrol berupa gaya angkat sehingga lintasan pesawat terbang mempunyai kondisi awal dan akhir sama dalam waktu yang minimum. Gerak pesawat dipengaruhi oleh gerakan angin vertikal sinusoidal. Dalam menyelesaikan permasalahan tersebut digunakan metode numerik Runge-Kutta Order Empat.

Dalam pembahasan makalah ini dibatasi pada ruang lingkup berikut :

1. Model sistem dinamik yang akan dibahas terfokus pada peluncuran pesawat terbang layang dengan gerakan angin vertikal sinusoidal.
2. Keadaan awal dan akhir lintasan pesawat terbang layang sama.
3. Gerakan angin dimodelkan berbentuk vertikal sinusoidal.
4. Penyelesaian numerik digunakan metode Runge-Kutta Order Empat.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan fungsi pengontrol optimal dengan waktu minimum dari peluncuran pesawat terbang layang dengan gerakan angin vertikal, sedangkan manfaat yang diharapkan adalah membantu memberi masukan pada para olahragawan pesawat terbang layang dalam mengantisipasi pengaruh angin saat penerbangan berlangsung.

## 2. Model Gerak Pesawat Terbang Layang

Persamaan gerak pesawat terbang layang dengan gerakan angin vertikal sinusoidal dapat dituliskan sebagai berikut [4]

$$\dot{V} = -\frac{\rho V^2 C_p S}{2M} - \left[ \frac{dW}{dX} V \cos \gamma + g \right] \sin \gamma \quad (1)$$

$$\dot{\gamma} = -\frac{\rho V C_L S}{2M} - \left[ \frac{dW}{dX} \cos \gamma + \frac{g}{V} \right] \cos \gamma \quad (2)$$

$$\dot{Y} = W(X) + V \sin \gamma \quad (3)$$

$$\dot{X} = V \cos \gamma \quad (4)$$

dengan  $g$  adalah konstanta percepatan gravitasi,  $\rho$  adalah kepadatan atmosfer,  $M$  merupakan massa pesawat terbang layang,  $W(X)$  adalah kecepatan gerakan angin vertikal dan  $Y$  adalah ketinggian yang bebas.  $X$  adalah jarak mendatar pesawat terhadap posisi awal pesawat,  $V$ , kecepatan pesawat terbang layang,  $\gamma$  merupakan sudut antara kecepatan relatif udara dan bidang datar,  $C_L$ , daya angkat dinamika udara,  $C_D$ , koefisien tarikan, sedangkan  $S$  adalah luas permukaan sayap.

Dalam makalah ini akan ditentukan fungsi pengontrol yang sesuai untuk mendapatkan waktu terbang minimum dengan keadaan awal dan akhir lintasan yang sudah ditentukan jaraknya pada interval  $0 \leq X \leq 1$ , dengan cara meminimumkan indeks perilaku

$$J = \int_0^{t_f} dt = \int_0^{X_f} (V \cos \gamma)^{-1} dX \quad (5)$$

dengan  $X_f$  tertentu dan  $t_f$  waktu tempuh.

Untuk memudahkan analisis dilakukan penormalan, dengan mendefinisikan variabel baru yaitu:  $x = \frac{X}{X_f}$ ,  $h = \frac{Y}{Y_f}$  dan  $v = V \sqrt{g X_f}$ ,  $w = W \sqrt{g X_f}$ . Dengan mensubstitusikan variabel-variabel tersebut pada persamaan 1,2,3,4, diperoleh persamaan sistem dinamik dimensi tiga yaitu:

$$\frac{dv}{dx} = -[\eta C_D(u) v^2 + (1 + \dot{w}) \sin \gamma] / (v \cos \gamma) \quad (6)$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = [\eta u v^2 - (1 + \dot{w} \cos \gamma)] / (v^2 \cos \gamma) \quad (7)$$

$$\frac{dh}{dx} = [v \sin \gamma + w(x)] / (v \cos \gamma) \quad (8)$$

dengan batas awal kecepatan  $v(0) = v_0$ , sudut kecepatan awal  $\gamma(0) = \gamma_0$ , ketinggian awal  $h(0) = 0$ , batas akhir kecepatan  $\psi_1 = v(1)/v_0 - 1 = 0$ , sudut kecepatan  $\psi_2 = \gamma(1) - \gamma_0 = 0$ , dan diasumsikan  $C_D(u) = a_1 + a_2 u + a_3 u^2$ ,  $u = C_L$ ,  $\eta = \frac{1}{2} \rho (S/Mg) g X_f$ ,  $\dot{w} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dw}{dx} v \cos \gamma$ , dengan kecepatan angin berupa fungsi sinusoidal  $w(x) = w_A \sin(2\pi x)$  untuk  $0 \leq x \leq 1$ .

Untuk menyelesaikan masalah optimasi tersebut di atas akan digunakan dua cara yaitu secara analitik dengan membentuk persamaan Hamilton dan secara numerik dengan menggunakan metode Runge Kutta.

### 3. Penyelesaian Analitik

Dengan melakukan substitusi syarat awal dan syarat batas dan kecepatan angin maka akan diperoleh sistem keadaan sebagai berikut:

$$\frac{dv}{dx} = -\eta C_D(u) \sec \gamma - \frac{\tan \gamma}{v} - 2\pi w_A \cos(2\pi x) \sin \gamma \quad (9)$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = \eta u \sec \gamma - \frac{1}{v^2} - \frac{2\pi w_A \cos(2\pi x) \cos \gamma}{v} \quad (10)$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{w_A \sin(2\pi x)}{v \cos \gamma} + \tan \gamma \quad (11)$$

Untuk mendapatkan fungsi pengontrol  $u$  sehingga indeks performansi Persamaan [5] minimum, maka terlebih dahulu dibentuk persamaan Hamilton

$$H = (v \cos \gamma)^{-1} + K_1^{-1} \left( \frac{v}{v_{stall}} - 1 \right)^{-1} - K_2^{-1} \left( \frac{v}{v_{stall}} - 1 \right)^{-1} + \lambda_1 \dot{v} + \lambda_2 \dot{\gamma} + \lambda_3 \dot{h} \quad (12)$$

Syarat perlu indeks performansi optimum adalah

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (13)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad (14)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad (15)$$

dengan  $y = (v, \gamma, h)$  dan  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , sehingga diperoleh sistem persamaan

diferensial non linear yang terdiri atas enam persamaan yaitu:

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -\frac{\eta C_D(u)v^2 + (1 + 2\pi w_A \cos(2\pi x)v \cos \gamma) \sin \gamma}{v \cos \gamma} \\ \dot{\gamma} &= \frac{\eta uv^2 - (1 + 2\pi w_A \cos(2\pi x)v \cos \gamma) \cos \gamma}{v^2 \cos \gamma} \\ \dot{h} &= \frac{v \sin \gamma + w_A \sin(2\pi x)}{v \cos \gamma} \\ \dot{\lambda}_1 &= -\frac{1}{v^2 \cos \gamma} - K_1^{-1} \left( \frac{v}{v_{stall}} - 1 \right)^{-2} + K_2^{-1} \left( 1 - \frac{v}{v_{stall}} \right)^{-2} + \\ &\quad \lambda_1 \left( \frac{-(\eta C_D(u)v - v^{-2}) \sin \gamma}{\cos \gamma} \right) + \\ &\quad \lambda_2 (-2v^{-3} - 2\pi w_A \cos(2\pi x) \cos \gamma v^{-2}) + \lambda_3 \frac{-w_A \sin(2\pi x)}{v^2 \cos \gamma} \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\sec \gamma \tan \gamma}{v} - \lambda_1 (\eta v \sec \gamma \tan \gamma C_D - \frac{\sec^2 \gamma}{v} - 2\pi w_A \cos(2\pi x) \cos \gamma) - \\ &\quad \lambda_2 (\eta u \sec \gamma \tan \gamma + \frac{2\pi w_A \cos(2\pi x) \sin \gamma}{v}) - \\ &\quad \lambda_3 \left( \frac{w_A \sin(2\pi x) \sec \gamma \tan \gamma}{v} + \sec^2 \gamma \right) \\ \dot{\lambda}_3 &= 0\end{aligned}$$

dengan kondisi stationer

$$\lambda_1 (\eta v (a_2 + 2a_3 u) \sec \gamma) + \lambda_2 \eta \sec \gamma = 0$$

atau

$$u = \frac{1}{2a_3} \left( \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 v} - a_2 \right)$$

Fungsi pengontrol optimal  $u$  yang merupakan daya angkat, dapat diperoleh dengan cara menyelesaikan sistem persamaan diferensial diatas. Karena sistem persamaan diferensial yang terbentuk merupakan sistem diferensial non linear dan terdiri atas 6 persamaan maka penyelesaian secara numerik lebih mudah dilakukan daripada penyelesaian analitik.

## 4. Penyelesaian Numerik

Penyelesaian numerik dilakukan dengan bantuan software Matlab. Metode Runge Kutta akan digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial dari model gerak pesawat terbang.

Diberikan nilai awal sebagai berikut: jarak awal  $x_0 = 0$ , kecepatan awal  $\sqrt{gX_f}v_0 = 28.17m/s$ , sudut awal  $\gamma_0 = -0.0191rad$ , jarak tempuh awal  $X_f = 1000m$ ,  $\eta = 0.01916X_f$ ,  $h_f = 20m$ , kecepatan maksimum  $v_{maks} = 70m/s$ , kecepatan minimum  $\sqrt{gX_f}v_{stall} = 18m/s$ , percepatan gravitasi  $g = 9.81m/s^2$ , koefisien daya tarik  $C_D(u) = 0.009278 - 0.009652u + 0.022288u^2$  sedangkan fungsi pengontrol  $u$ , koefisien daya angkat akan ditentukan untuk nilai  $K_1 = 200, K_2 = 1000, K_3 = 5000$ .

Syarat batas awal dan akhir telah ditetapkan yaitu kecepatan awal dan akhir  $v(0) = v(l)$ , sudut kecepatan relatif  $\gamma(0) = \gamma(l)$  dan jarak tempuh  $l = X_f = 1000m$ .

Dalam simulasi ini dipilih beberapa kecepatan angin  $w_A$  antara lain 2, -2, 3, -3 dan 5 meter per detik dan beberapa nilai fungsi pengontrol  $u$ , kemudian sistem persamaan diferensial diselesaikan dengan menggunakan metode Runge Kutta. Penyelesaian yang telah diperoleh digunakan untuk menghitung indeks performansi  $J$  dan dicari nilai  $J$  yang minimum, serta memenuhi syarat batas.

Dari hasil simulasi diperoleh bahwa untuk kecepatan angin  $w_A = 2$  koefisien daya angkat yang memenuhi terletak pada interval  $0.67145 \leq u \leq 0.67151$  dengan waktu terbang minimum  $t_{min} = 35.5$  detik, untuk kecepatan angin  $w_A = -2$  menghasilkan  $0.61830 \leq u \leq 0.61839$  dengan  $t_{min} = 34$  detik, kecepatan angin  $w_A = 3$  menghasilkan  $0.6845 \leq u \leq 0.6847$  dengan  $t_{min} = 34$  detik, kecepatan angin  $w_A = -3$  menghasilkan  $0.6047 \leq u \leq 0.6049$  dengan  $t_{min} = 33.26$  detik, sedangkan kecepatan angin  $w_A = 5$  menghasilkan  $0.7103 \leq u \leq 0.71045$  dengan  $t_{min} = 35.5$  detik. Secara ringkas sebagian hasil simulasi dapat dilihat pada tabel berikut:

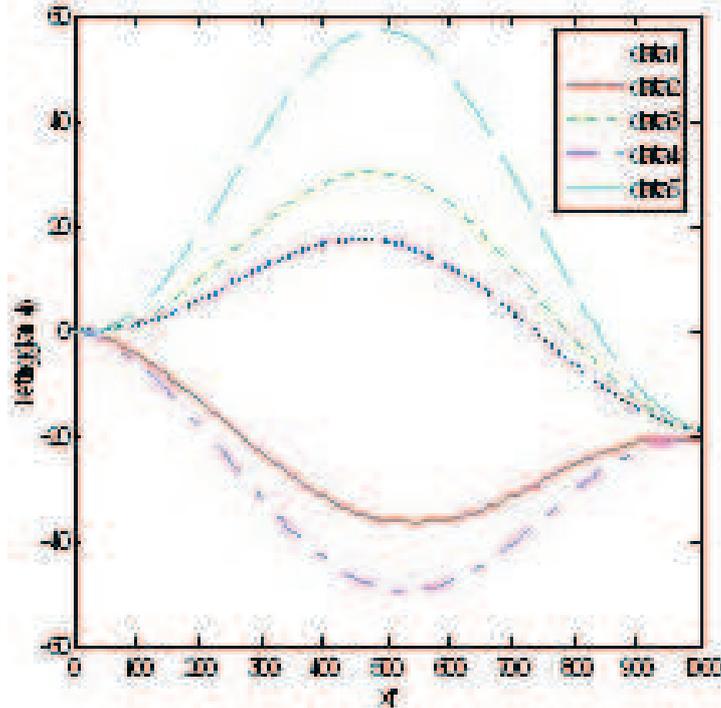
Tabel 1: Hubungan Antara Kecepatan Angin dan Koefisien Daya Angkat

Jenis Data	$w_A$	$u$	$v(0) = v(X_f)$	$\gamma(X_f)$	$J_{min}$	$t_{min}$
1	2	0.67151	28.17	-0.0191	7358.55	35.5
2	-2	0.61839	28.17	-0.0190	7206.66	34
3	3	0.68470	28.17	-0.0192	7365.92	35.5
4	-3	0.60490	28.17	-0.0189	7140.80	33.26
5	5	0.71045	28.17	-0.0191	7389.08	35.5

Dari tabel tersebut tampak bahwa untuk kecepatan angin yang berbeda akan dapat ditentukan koefisien daya angkat pesawat yang sesuai dengan waktu tempuh minimum, indeks performansi minimum yang berbeda pula.

Lintasan optimal untuk beberapa nilai kecepatan angin  $w_A$  dan koefisien daya angkat  $u$  sesuai pada Tabel 1 digambarkan pada Gambar 1. Tampak bahwa lintasan terpendek terjadi pada data ke empat, yaitu dengan kecepatan angin  $w_A = -3$ , diperoleh koefisien daya angkat  $u = 0.60490$  dengan waktu terbang  $t_{min} = 33.26$  detik. Hal ini ada kesesuaian antara waktu terbang terkecil (dari

Tabel 1) dan lintasan terpendek (dari Gambar 1). Sedangkan lintasan terjauh terjadi pada data ke lima, dengan kecepatan angin  $w_A = 5$ , diperoleh koefisien daya angkat  $u = 0.7045$  dengan waktu terbang minimum  $t_{min} = 35.5$ . Waktu terbang  $t_{min} = 35.5$  terjadi pada data ke satu dan ke tiga, tetapi data ke lima mempunyai indeks performansi yang terbesar yaitu  $J_{min} = 7389.08$ , sedangkan data ke satu dan ketiga mempunyai indeks performansi yang lebih kecil.



Gambar 1: Lintasan Optimal Pesawat Terbang Layang

## 5. Kesimpulan dan Saran

Dari simulasi dengan menggunakan beberapa kecepatan angin, keadaan awal dan akhir sama dapat disimpulkan bahwa

1. Penyelesaian secara numerik lebih memungkinkan dilakukan daripada secara analitik karena sistem Persamaan diferensial yang terbentuk merupakan sistem non linear.

2. Dengan mengetahui kecepatan angin maka dapat ditentukan koefisien daya angkat optimal sehingga waktu tempuh penerbangan minimum.
3. Waktu tempuh minimum terkecil  $t_{min} = 33.26$  detik terjadi pada kecepatan angin  $w_A = -3$  meter per detik dengan fungsi pengontrol yaitu koefisien daya angkat pesawat pada interval  $0.6047 \leq u \leq 0.6049$ .
4. Waktu tempuh minimum terbesar  $t_{min} = 35.50$  detik terjadi pada kecepatan angin  $w_A = 5$  meter per detik dengan fungsi pengontrol yaitu koefisien daya angkat pesawat pada interval  $0.71030 \leq u \leq 0.71045$ .
5. Interval koefisien daya angkat terpendek adalah pada kecepatan angin  $w_A = 2$  meter per detik yaitu  $0.67145 \leq u \leq 0.67151$  sedangkan interval koefisien daya angkat yang terlebar terjadi pada kecepatan angin  $w_A = -3$  meter per detik, yaitu  $0.6047 \leq u \leq 0.6049$ .

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mengkaji

1. Koefisien daya angkat optimum untuk keadaan awal dan akhir yang berbeda
2. Kecepatan angin dengan distribusi selain sinusoidal vertikal

## Pustaka

- [1] Chapra S.C. dan Canale R.P., "Metode Numerik Untuk Teknik", UI-Press, 1991.
- [2] De Jong J.L., "The Optimal-Range-Velocity Polar, a New Theoretical Tool for The Optimisation of Sailplane Flight Trajectories", Memorandum COSOR, 77-28,
- [3] Pierson B.L. and Chen I., 1979, "Minimum Landing-Approach Distance for Sailolane", Iowa State University, Ames, Iowa.
- [4] Pierson B.L. and Chen I, "Minimum Altitude-Loss Soaring in Sinusoidal Vertical Wind Distribution," to appear in Optimal Control Applications & Methods, Vol. 1.
- [5] Pierson B.L. and Chen I, "Minimum-Time Soaring Through A Specified Vertical Wind Distributions", Departement of Aerospace Engineering and the Engineering Research Institute, Iowa State University, U.S.A.